

卷筒纸印刷机折页机构运动学 方程直接积分解法

李壮举¹, 田舜禹¹, 赵 伟², 曹少中²

(1. 北京建筑大学电信学院, 北京 100044;

2. 北京印刷学院高端印刷装备信号与信息处理北京市重点实验室, 北京 102600)

摘 要: 针对运动副间隙和轴承滚子变形引起的折页机构非线性动态响应问题, 提出刚性杆与弹簧组合假设, 建立了折页机构间隙动力学模型. 对含二阶偏微分方程组的含间隙折页机构动力学模型, 采用非线性系统直接积分法进行求解. 非线性系统分析的核心归结为系统状态方程的求解问题, 对于一般非线性控制系统, 通过引入由状态量、控制量与自变量时间 t 为坐标构成的“广义状态空间”, 在广义状态空间处将方程的右端展开为关于时间的 Taylor 级数, 进一步直接积分获得非线性控制系统状态方程关于自变量时间的级数解. 以卷筒纸印刷机折页机构这种存在耦合的非线性系统为例, 利用本文提出的解法得出了输入量与输出量的解析解, 并仿真验证了方法的正确性.

关键词: 卷筒纸印刷机折页机构; 动力学模型; 非线性系统; 状态方程; 直接积分

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)12-3037-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.12.030

Direct-Integrating Approach for Solving State Equation of the Mechanics Model of Web Offset Press's Folding Mechanism with Clearance

LI Zhuang-ju¹, TIAN Shun-yu¹, ZHAO Wei², CAO Shao-zhong²

(1. School of Electrical and Information Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044;

2. Beijing Key Laboratory of Signal and Information Processing for High-End Printing Equipment,
Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing 102600, China)

Abstract: To the nonlinear dynamic response of folder system caused by the pair clearance and the bearing stiffness, the hypothesis of rigid role and spring combination is put forward, and the dynamics model of folder mechanism with clearance is established. The dynamics model which contains second order partial differential equations is solved by direct-integrating approach method. The kernel of nonlinear system analysis is the solving of system state equation. Therefore, for a general nonlinear control system, the concept of general time-state space comprising of state variables, control variables, and Time t is introduced. In order to solve the state equation of nonlinear control system, at the operation point of general time-state space, the right side of the state equation can be expanded as Taylor series about time. Then the series solution of the nonlinear control state equation, for which the solution is expression in the series, can be obtained by using direct-integrating approach. Dynamics model of the folder mechanism is a typical nonlinear system. Then we obtain the curves of input quantity and output quantity of this dynamics model by the direct-integrating method.

Key words: web offset press's folding mechanism; dynamic model; nonlinear systems; state equation; direct-integrating

1 引言

印刷工业在国民经济中占有重要地位, 提高印刷

装备的设计、制造水平是印刷工业持续稳步发展的重要保证. 印刷机械是精密、高速、自动化的光机电一体化设备, 随着印刷机速度日益提高, 机械运动副间隙、构件

的弹性变形、机械系统非线性振动等引起的机械运动学、动力学输出的微小变化,都会使印刷机的精度、印刷质量和机械可靠性下降,甚至无法正常工作.因此,在印刷机设计过程中,应充分考虑机械系统的非线性动力学特性,进行非线性动力学分析计算^[1].

高速、高精度和高稳定性是现代印刷机械的重要特征和必然要求.卷筒纸印刷机是目前世界上印刷速度最高的大型设备,而折页机构是制约卷筒纸印刷机速度进一步提高的关键因素之一.本文结合印刷机械特点和发展趋势,以卷筒纸印刷机折页机构为研究对象,围绕提高折页机构的精度和稳定性,对折页机构进行含间隙机构动力学研究.

本文首先将建立轮转印刷机刀式折页机构运动副间隙的非线性动力学模型,之后针对印刷机械非线性动态系统提出一种直接积分方法,得出动力学模型的解析解^[2~7].该方法可以用于印刷机构的非线性动力学分析与设计.

2 含间隙折页机构动力学建模

随着卷筒纸印刷机速度的上升,折页机构动态响应表现出丰富的非线性特征.以前对折页机构的研究,都是认为运动副是刚性且无间隙的理想状态,将折页机构做为单自由度系统进行分析^[8,9],无法解释折页机构的非线性动态响应现象.实际状态下,运动副间隙和轴承滚子的变形会引起与运动副相连两构件相对微小的运动.随着折页机构速度的提高,两构件的微小相对运动使折页机构表现出非线性动态响应.下面考虑运动副间隙和轴承滚子变形因素,对折页机构进行动力学研究^[10~13].

2.1 含间隙折页机构动力学模型

卷筒纸印刷机折页机构如图 1 所示,主要由曲柄、连杆和折刀杆三部分组成.折刀装有折刀杆上,折刀杆在曲柄和连杆的带动下作往复摆动,当纸张从两辊子上通过时,折刀将纸张推入两辊子之间,由两辊子挤压纸张完成一次横折动作.

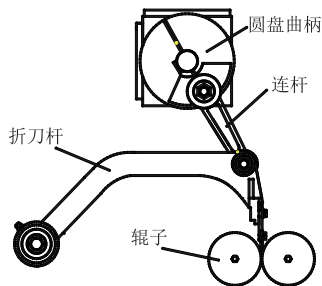


图1 刀式折页机构

随着运转速度的提高,折页机构各构件的结构、质

量、转动惯量、质心位置等因素都对系统的动态响应的影响将更加显著.

卷筒纸印刷机折页机构运动简图及所建坐标系如图 2 所示.折页机构各构件结构参数如下:曲柄杆长为 l_1 ,质量为 m_1 ,转动惯量为 J_{s1} ,质心坐标为 (x_{s1}, y_{s1}) ,距 A 点距离为 l_{s1} ,曲柄与 X 轴正方向的夹角为 θ_1 ;连杆杆长为 l_2 ,质量为 m_2 ,转动惯量为 J_{s2} ,质心坐标为 (x_{s2}, y_{s2}) ,距 B 点距离为 l_{s2} ,连杆与 X 轴正方向的夹角为 θ_2 ;折刀杆由摇杆和折刀头两部分组成,摇杆长 l_3 ,折刀头长 l_5 ,折刀头与摇杆夹角为 β ,折刀杆质量为 m_3 ,转动惯量为 J_{s3} ,质心坐标为 (x_{s3}, y_{s3}) ,距 D 点距离为 l_{s3} ,折刀杆与 X 轴负方向夹角为 θ_3 .

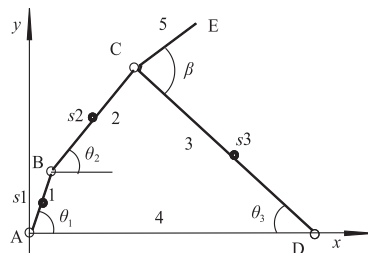


图2 折页机构运动简图

2.2 刚性杆弹簧组合假设

引起折页机构非线性动态响应的主要因素有两个:运动副间隙和轴承滚子的变形.这两个因素对折页机构的影响不同,在含间隙机构动力学建模型中,对这两个因素分别做出假设.

2.2.1 运动副间隙的刚性杆假设

为保证折页机构的工作精度,折页机构的运动副间隙必须进行严格的控制,同时,折页机构的速度不是很高.这种情况下,可以忽略销轴与套圈间的碰撞,认为销轴与套圈始终保持接触.

由于运动副连续接触,使运动副的销轴与套圈中心始终保持运动副间隙的距离.可以将各运动副间隙假设为无质量的刚性杆.刚性杆长度为运动副间隙量,即 $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$,各刚性杆与 X 轴正方向的夹角称为运动副间隙角,记为 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.用刚性杆表示运动副间隙,运动副间隙角反映销轴与套圈的接触位置的变化.

刚性杆的引入增加了系统的自由度,使折页机构成为八杆机构,有五个自由度.在折页机构动力学分析中,对每个自由度引入一个广义坐标,通常采用曲柄转角 θ_1 和运动副间隙角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 五个运动参数作为广义坐标,即 $q = (\theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.若定义各运动参数对各广义自由度的偏导数为偏类速度,如连杆转角的偏类速度为 $\frac{\partial \theta_2}{\partial q_i}$,对偏类速度有以下性质:偏类速度等

于速度对广义坐标速度的偏微分,即

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{q}_i} \quad (1)$$

2.2.2 滚子的弹簧假设

在上节滚子负载与轴承载荷关系分析中,假设在轴承载荷作用的方向上始终有一个“滚子”. 在折页机构动力学分析中,将这个“滚子”假设始终受压的弹簧. 弹簧的刚度为各轴承的滚子径向刚度 $K_r = (K_{r1}, K_{r2}, K_{r3}, K_{r4})$, 弹簧中心线与 X 轴的正方向夹角为 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. 弹簧的变形与滚子的变形一致, γ 反映滚子的变形方向.

弹簧在折页机构中并没增加系统的自由度,因为弹簧的变形量受运动副间约束反力和刚度的制约,弹簧变形的方向应始终与运动副间约束反力的方向保持一致. 因此,轴承滚子的径向变形可视为局部自由度. 各运动副约束反力为 $F_R = (F_{R1}, F_{R2}, F_{R3}, F_{R4})$, X 、 Y 方向分力为 F_{Rix}, F_{Riy} , 则各弹簧受压缩的变形量 l_{ki} 和变形方向 γ_i 为

$$\begin{cases} l_{ki} = \frac{F_{Ri}}{K_{ri}} \\ \gamma_i = \frac{F_{Riy}}{F_{Rix}} \end{cases}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

在折页机构中引入弹簧后,折页机构的增加了 8 个局部自由度,4 个为轴承的径向动态刚度引起的变形量 l_{ki} , 表现为弹簧受到压缩变形;4 个为轴承径向压缩的角度 γ_i , 表现为弹簧压缩方向的变化. 将运动副间隙假设成无质量刚性杆,将轴承滚子假设为弹簧. 用刚性杆与弹簧组合模拟折页机构各运动副接触情况,即为刚性杆弹簧组合假设.

2.3 折页机构运动学分析

折刀头 E 点的位置 (x_E, y_E) 和各杆的几何位置关系可表示为

$$\begin{cases} x_E = l_4 - l_3 \cos \theta_3 + l_5 \cos(\beta - \theta_3) \\ \quad + \sum_{i=3}^4 (r_i - l_{ki} \cos(\alpha_i - \gamma_i)) \cos \alpha_i \\ y_E = l_3 \sin \theta_3 + l_5 \sin(\beta - \theta_3) \\ \quad + \sum_{i=3}^4 (r_i - l_{ki} \cos(\alpha_i - \gamma_i)) \sin \alpha_i \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ \quad + \sum_{i=1}^4 (r_i - l_{ki} \cos(\alpha_i - \gamma_i)) \cos \alpha_i = l_4 \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ \quad + \sum_{i=1}^4 (r_i - l_{ki} \cos(\alpha_i - \gamma_i)) \sin \alpha_i = l_3 \sin \theta_3 \end{cases} \quad (3)$$

各运动杆质心的位置坐标可以用五个广义坐标表示:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{s1} \\ y_{s1} \end{bmatrix} &= l_{s1} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} + (r_1 - l_{k1} \cos(\alpha_1 - \gamma_1)) \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \end{bmatrix} &= l_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{bmatrix} + l_{s2} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 (r_i - l_{ki} \cos(\alpha_i - \gamma_i)) \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{s3} \\ y_{s3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_4 \\ 0 \end{bmatrix} + l_{s3} \begin{bmatrix} -\cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + (r_4 - l_{k4} \cos(\alpha_4 - \gamma_4)) \begin{bmatrix} \cos \alpha_4 \\ \sin \alpha_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

θ_2, θ_3 是 $\theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的函数, 将其对时间求导可得角速度, 并用偏类速度表示

$$\begin{cases} \dot{\theta}_3 = \frac{d\theta_3}{dt} = \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \\ \dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \end{cases} \quad (5)$$

式(5)中, $\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \theta_3}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha_i}$ 是 θ_2, θ_3 对广义坐标的偏类速度, 由式(4)后两式对相应的广义坐标求偏导数, 并简化后可求得.

同样, x_E, y_E 是广义坐标 $\theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的函数, 对时间求导可得 E 点的速度

$$\begin{cases} \dot{x}_E = \frac{\partial x_E}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial x_E}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \\ \dot{y}_E = \frac{\partial y_E}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y_E}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \end{cases} \quad (6)$$

式(6)中, $\frac{\partial x_E}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x_E}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial y_E}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y_E}{\partial \alpha_i}$ 可由式(4)前两式对相应的广义坐标求偏导数得到. 式(6)对时间求导, 并用偏类速度表示, 各运动杆质心的速度可以表述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_{sj} = \frac{\partial x_{sj}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial x_{sj}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \\ \dot{y}_{sj} = \frac{\partial y_{sj}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial y_{sj}}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \end{cases}, \quad j=1, 2, 3 \quad (7)$$

式(7)中, $\frac{\partial x_{sj}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x_{sj}}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial y_{sj}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y_{sj}}{\partial \alpha_i}$ 由式(6)对广义坐标和局部自由度坐标求偏导得到. 考虑折页机构运动副间阻尼的影响, 对折页机构采用耗散函数的拉格朗日方程, 其表达式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = F_j \quad (8)$$

式(8)中 q_j 为广义坐标, 即 $q = (\theta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$; W 、 U 、 P 分别为系统的动能、势能和耗散能; F_j 为广义外力. 折页机构的动能、势能和耗散能分别为

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_{si}^2 + \dot{y}_{si}^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} J_{si} \dot{\theta}_i^2 \quad (9)$$

$$U = \sum_{i=1}^3 m_i g y_{si} \quad (10)$$

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_{\theta i} \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 c_{\alpha i} \dot{\alpha}_i^2 + \frac{1}{2} c_{si} \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_{si}^2 + \dot{y}_{si}^2) \quad (11)$$

其中, $c_{\theta i}$ 为转角阻尼系数(单位: gcms/rad), $c_{\alpha i}$ 为间隙角阻尼系数(单位: gcms/rad), c_{si} 为线位移阻尼系数(单位: Ns²/cm). 线位移阻尼系数 c_{si} 相对 $c_{\theta i}$ 和 $c_{\alpha i}$ 较小, 在计算中可以忽略. 上述方程可以化为:

$$S\ddot{q} = T \quad (12)$$

$$\text{式(12)中 } S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{bmatrix}, S_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 4) \text{ 为第 } i \text{ 个广义坐标中第 } j \text{ 个自由度加速度的广义质量, 其中 } S_{i,j} = S_{j,i} (i \neq j); \ddot{q} = [\ddot{\theta}_1, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\alpha}_3, \ddot{\alpha}_4]^T, \text{ 为自由度的加速度 (mm/s}^2\text{)}; T = [T_1, T_2, T_3, T_4, T_5]^T.$$

...

$$\begin{cases} \frac{d\dot{\theta}_1}{dt} = f_1(\theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dot{\theta}_1, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4) \\ \frac{d\dot{\theta}_1}{dt} = \dot{\theta}_1 \\ \frac{d\dot{\alpha}_i}{dt} = f_{i+1}(\theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dot{\theta}_1, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3, \dot{\alpha}_4) \\ \frac{d\dot{\alpha}_i}{dt} = \dot{\alpha}_i \\ i = 1, 2, \dots, 4 \end{cases} \quad (13)$$

上式可进一步改写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = A_i(x) + B_i(x)T, i = 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases} \quad (14)$$

3 非线性系统状态方程直接积分法

一般非线性控制系统状态方程描述为

$$d\mathbf{x}(t)/dt = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(k) \quad (15)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T$ 为 N 维状态向量; $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$ 为控制向量; $m \leq N$; $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = (f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \dots, f_N(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t))^T$ 为 N 维实值函数向量. 为了研究问题的方便, 引入广义状态空间的概念.

定义 1 对于非线性控制系统, 由系统的状态量 $x_i(t) (i = 1, 2, \dots, N)$ 和控制变量 $u_j(t) (j = 1, 2, \dots,$

$m)$ 及自变量时间 t 为坐标组成的空间称为广义状态空间. 根据广义状态空间概念, 显然, 系统状态方程的求解是一个初值问题.

引理 1 设初值问题为

$$\begin{aligned} dx_i(t)/dt &= f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \\ x_i(t_k) &= x_i(k), i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

$f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区域 R 中连续, 且在区间 I 中具有任意多次导数, $\mathbf{u}(t)$ 在该区间也存在任意多次导数, 并存在正数 H 和自然数 N , 使得

$$|f_i^{(n)}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)| \leq H, \forall t \in I, n > N.$$

其中

$$R: |t - t_k| \leq a, |x_i(t) - x_i(k)| \leq b_i,$$

$$|u_j(t) - u_j(k)| \leq c_j, j = 1, 2, \dots, m;$$

$$I = [t_k - h, t_k + h], h = \min\{a, d/M\},$$

$$M > |f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)|, d = \min\{b_i, c_j\}.$$

则 $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区间 I 上可以展开成如下收敛的自变量的 Taylor 级数:

$$f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{l!} (T - t_k)^l, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

定理 1 初值问题式(16)的 $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 在区域 R 中的区间 I 上可以展为自变量 t 收敛的 Taylor 级数, 则初值问题(16)在 t_k 点的邻域 $|t - t_k| < \rho (\rho = a(1 - e^{-d/(2aM)}))$ 内有一个且仅有一个级数解为

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} (T - t_k)^{l+1}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

只要知道非线性控制系统的状态方程, 且 $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 的各阶导数均存在, 就可以根据上述公式求出状态向量的逐次近似解, 并且无穷级数解的极限函数即为非线性控制系统状态方程的精确解. 上式可改写为:

$$x_i(t) = x_i(k) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(t_k)}{(l+1)!} (t - t_k)^{l+1} \quad (19)$$

在实际计算时, 级数只取有限项. 当 Taylor 多项式的次数为 0, 1, 2, ... 时, 相应近似公式分别称为一级近似式、二级近似式和三级近似式等, 具体如下: 一级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau \quad (20)$$

二级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k)\tau^2 \quad (21)$$

三级近似为

$$x_i(t) = x_i(k) + f_i(t_k)\tau + \frac{1}{2!} f_i^{(1)}(t_k)\tau^2 + \frac{1}{3!} f_i^{(2)}(t_k)\tau^3 \quad (22)$$

当 τ 取步长 Δt 时,由初值 $x(0)$ 可根据需要选用相应的 $j+1$ ($j=0,1,\dots$) 次近似式

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{l=0}^j \frac{1}{(l+1)!} f^{(l)}(k) \Delta t^{l+1} \quad (23)$$

$$x_i(t) = x_i(0) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{f_i^{(l)}(0)}{(l+1)!} t^{l+1} \quad (24)$$

4 算例分析

折页机状态方程组如式(25)所示:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = A_i(x) + B_i(x)T, \quad i=1,3,5,7,9 \end{cases} \quad (25)$$

根据曲柄转速和运动副间隙情况,适当选取步长,一般取计算步长 Δt 为 10^{-4} s. 运动副间隙角初值,可都取为 0,间隙初角速度取 50 弧度/s,初角加速度取 1000 弧度/s². 利用直接积分法对方程组求解,取三级近似,状态方程可以改写为如下形式:

$$\begin{aligned} x(k+1) = & x(k) + f(k) \Delta t + \frac{1}{2!} f^{(1)}(k) \Delta t^2 \\ & + \frac{1}{3!} f^{(2)}(k) \Delta t^3 \end{aligned} \quad (26)$$

其中:

$$f(k) = \begin{bmatrix} x_1 \\ A_1(x) + B_1(x)T \\ x_3 \\ A_3(x) + B_3(x)T \\ \dots \\ A_9(x) + B_9(x)T \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$f^{(1)}(k) = [K_1, K_2, K_3, \dots, K_9, K_{10}]^T \quad (28)$$

式(28)中:

$$K_1 = [A_1(x(k)) + B_1(x(k))T,$$

$$\begin{aligned} K_2 = & \frac{\partial A_1}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial A_1}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial A_1}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial A_1}{\partial x_9} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T) \\ & + \frac{\partial B_1 T}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial B_1 T}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial B_1 T}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial B_1 T}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \end{aligned}$$

...

$$+ \frac{\partial B_1 T}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial B_1 T}{\partial x_{10}} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))u),$$

$$K_3 = A_3(x(k)) + B_3(x(k))T,$$

...

$$\begin{aligned} K_{10} = & \frac{\partial A_9}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial A_9}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial A_9}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial A_9}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \\ & \dots \\ & + \frac{\partial A_9}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial A_9}{\partial x_9} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T) \\ & + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \\ & \dots \\ & + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial B_9 T}{\partial x_{10}} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T) \end{aligned}$$

$$f^{(2)}(k) = \left(\frac{df^{(1)}(k)}{dt} \right) = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots, Y_{10}]^T \quad (29)$$

式(29)中:

$$Y_1 = K_2,$$

$$\begin{aligned} Y_2 = & \frac{\partial K_2}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial K_2}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial K_2}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial K_2}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \\ & + \dots \\ & + \frac{\partial K_2}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial K_2}{\partial x_9} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T), \end{aligned}$$

$$Y_3 = K_4,$$

$$\begin{aligned} Y_4 = & \frac{\partial K_4}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial K_4}{\partial x_2} (A_4(x(k)) + B_4(x(k))T) \\ & + \frac{\partial K_4}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial K_4}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \\ & + \dots \\ & + \frac{\partial K_4}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial K_4}{\partial x_9} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T), \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} Y_{10} = & \frac{\partial K_{10}}{\partial x_1} x_2(t) + \frac{\partial K_{10}}{\partial x_2} (A_1(x(k)) + B_1(x(k))T) \\ & + \frac{\partial K_{10}}{\partial x_3} x_4(t) + \frac{\partial K_{10}}{\partial x_4} (A_3(x(k)) + B_3(x(k))T) \\ & + \dots \\ & + \frac{\partial K_{10}}{\partial x_9} x_9(t) + \frac{\partial K_{10}}{\partial x_9} (A_9(x(k)) + B_9(x(k))T) \end{aligned}$$

在 Matlab 软件中用直接积分法对状态方程进行计算. Matlab 仿真结果如下:

由上图可看出,直接积分法可以得到方程的直接解析解.从曲线可看出实际状态折刀杆角加速度出现

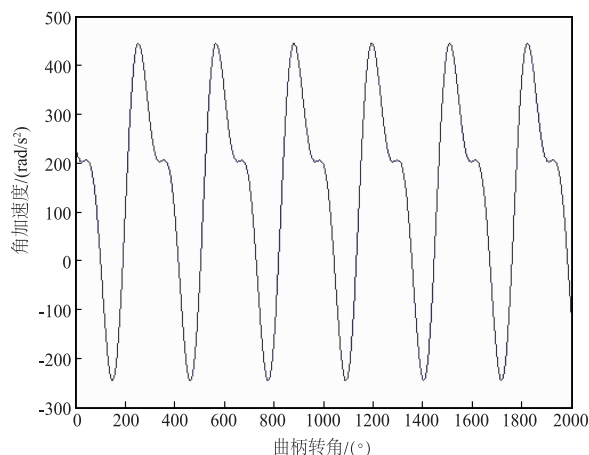


图3 理想状态折刀杆角加速度

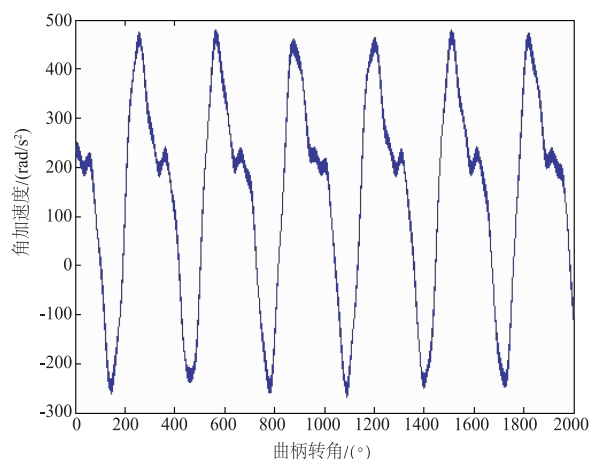


图4 间隙 0.05mm 折刀杆角加速度

明显非线性特征. 间隙角角加速度远大于折页机构各构件角加速度最大值, 达到 100 倍左右; 而且它们的变化迅速且没有规律, 具有很强的随机性. 随着曲柄转速的进一步上升, 折页机构的加速度动态响应将表现出明显的混沌状态. 该仿真验证了直接积分法的正确性.

5 结语

通过引入广义状态空间的概念, 将非线性系统印刷机折页机构运动学方程进行直接积分求得方程关于时间的无穷级数解. 求解过程中除了被积分函数用 Taylor 级数展开之外没有用其他任何近似, 所得结果十分简洁, 可以对其精确解进行任意严格逼近. 对印刷机折页机构这一典型的耦合性非线性系统的状态方程进行了直接求解, 得到了各状态量和控制量的解析解, 证明了该方法适合于一般的非线性系统.

参考文献

[1] 袁英才. 卷筒纸印刷机含间隙折页机构动力学研究及稳

健设计[D]. 长沙: 中南大学, 2011.

Yuan Ying-cai. Dynamics Research and Robust Desing of Web Offset Press 's Folding Mechanism with Clearance [D]. Changsha: Central South University, 2011. (in Chinese)

[2] 曹少中, 涂序彦. 非线性控制系统状态方程直接积分解法[J]. 控制与决策, 2011, 26(10): 1591 - 1595.

CAO Shao-zhong, TU Xu-yan. Direct-integrating approach for solving state equation of nonlinear control systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(10): 1591 - 1595. (in Chinese)

[3] 洪奕光, 程代展. 非线性系统的分析与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2005. 167 - 185.

[4] 曹少中, 赵伟. 球型机器人状态方程直接积分解法[J]. 电子学报, 2016, 44(12): 3020 - 3025.

CAO Shao-zhong, ZHAO Wei. Direct-integrating approach for solving state equation of the mechanics model of spherical robot[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(12): 3020 - 3025. (in Chinese)

[5] Srivastava H M, Niukkanen A W. Some clebsch-gordan type linearization relations and associated families of Dirichlet integrals[J]. Mathematical and Computer Modeling, 2003, 37(3 - 4): 245 - 250.

[6] Doyle F J, Allgower F, Morari M. Normal form approach to approximate input-output linearization for maximum phase nonlinear SISO systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(2): 305 - 309.

[7] Albeverio S, Bozhok R, Koshmanenko V. The rigged hilbert spaces approach in singular perturbation theory[J]. Mathematical Physics, 2006, 58(2): 227 - 246.

[8] Lin T C, David H Schultz, Zhang W Q. Numerical solutions of linear and nonlinear singular perturbation problems[J]. Computer and Mathematics Applications, 2008, 55(11): 2574 - 2592.

[9] Stephen Schecter. Traveling-wave solutions of convection-diffusion systems by center manifold reduction[J]. Nonlinear Analysis, 2002, 49(1): 35 - 59.

[10] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(1): 49 - 75

[11] Kahraman A, Singh R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146(1): 135 - 156

[12] Padmanabhan C, Singh R. Spectral coupling issues in a two-degree-of-freedom system with clearance non-linearity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 155(2): 209 - 230

[13] Vinayak H, Singh R, Padmanabhan C. Linear dynamic a-

nalysis of multi-mesh transmissions containing external
rigid gears[J]. Journal of Sound and Vibration,1995,185

(1):1-32

作者简介



李壮举 男,1975 年生于河南南阳.工学博士.研究方向为多变量系统解耦控制、复杂系统的控制研究、机器人技术研究.
E-mail;lizhuangju@ bucea. edu. cn



田舜禹 男,1992 年生于北京.硕士研究生.研究方向为复杂系统的控制研究、机器人技术研究.
E-mail;630377414@ qq. com



赵 伟 男,1983 年生于山东泰安.工学博士.北京印刷学院信息工程学院讲师.研究方向为机器人技术.
E-mail;zhaoweihu@ 163. com



曹少中 男,1965 年生于河北保定.工学博士.北京印刷学院信息工程学院教授.研究方向为非线性系统理论、机器人控制理论.
E-mail;caoshaozhong@ bigc. edu. cn